

Marco Iosa

IL NUMERO MERAVIGLIOSO:
LA SEZIONE AUREA

*Bellezza della matematica,
armonia dell'universo, musica della natura*



TANGRAM
EDIZIONI SCIENTIFICHE
TRENTO

Marco Iosa, *Il numero meraviglioso: la sezione aurea*
Copyright © 2018 Tangram Edizioni Scientifiche
Gruppo Editoriale Tangram Srl
Via dei Casai, 6 – 38123 Trento
www.edizioni-tangram.it
info@edizioni-tangram.it

Prima edizione: settembre 2018, *Printed in EU*

ISBN 978-88-6458-184-2

In copertina: *krinichnaya* – 123RF Archivio Fotografico
Le immagini di questo libro sono tratte dal Public Repository di
Wikimedia Commons o disegnate al computer dall'autore.

La sezione aurea è un numero che è più volte apparso nella storia della scienza e dell'arte, intrecciandosi con le vite parallele di grandi uomini, legando il suo destino a quello della matematica, della scienza e dell'arte, racchiudendo nelle sue infinite cifre decimali l'incommensurabilità dell'universo e nella sua perfetta proporzionalità l'armonia delle galassie e dei girasoli, del Partenone e del "Giudizio universale".

Un numero che ha affascinato Leonardo da Vinci e Michelangelo, che si è palesato nelle opere di Fidia e si è nascosto tra i numeri di Fibonacci, che ha terrorizzato i pitagorici e fatto innamorare Keplero. Un numero che, improvvisamente, ha cambiato la mia vita e il mio modo di vedere le cose.

*Ad Alessandro, Arianna ed Emanuele:
affinché vadano sempre oltre le apparenze,
fino alle formule delle cose,
formule magiche per il cuore,
e formule matematiche per la mente.*

Premessa. La musica dei numeri	9
1. La scoperta dell'incommensurabile, ovvero il numero proibito	13
2. Il Partenone, Venere e la proporzione della bellezza, ovvero il numero perfetto	25
3. La sezione aurea, Atlantide e l'Iperurano, ovvero il numero platonico	33
4. Il segmento di Euclide, ovvero il numero geometrico	39
5. Nascita e rinascita della matematica, ovvero i numeri di Fibonacci	53
6. Leonardo, Raffaello e Michelangelo, ovvero il numero divino	65
7. La donna, il sogno e il grande incubo, ovvero il numero dell'armonia	75
8. La sezione aurea in natura, ovvero il numero sorprendente	81
9. Il cammino della scienza e la scienza del cammino, ovvero il numero meraviglioso	93
Bibliografia	109

INDICE DELLE FIGURE

Figura 1. Mattonelle e teorema di Pitagora	17
Figura 2. La diagonale di un pentagono regolare di lato pari a 1 è lunga 1,618... ovvero la sezione aurea.	28
Figura 3. Il Partenone è costruito con la facciata che è inscritta in un rettangolo aureo.	29
Figura 4. Doriforo, Venere di Milo, Bronzi di Riace sono statue che hanno proporzione aurea tra l'altezza totale e l'altezza dell'ombelico da terra	31
Figura 5. Sezione di un segmento in media ed estrema ragione, rettangolo aureo, sua costruzione a partire da un quadrato, e progressiva divisione in quadrati da cui scaturisce una spirale aurea.	48
Figura 6. La facciata della Cattedrale di Notre Dame di Parigi, dove sono identificabili le proporzioni auree tra elementi architettonici come mostrato dai segmenti sovrapposti.	51
Figura 7. Castel del Monte: il portico riporta elementi costruttivi del pentagono e del pentagramma.	52
Figura 8. Flagellazione di Cristo, Piero della Francesca, 1469. L'opera è inscritta in un rettangolo aureo, con Cristo al centro delle diagonali del quadrato che si ottiene partendo dal lato corto del rettangolo aureo.	69
Figura 9. La Scuola di Atene, Raffaello, 1509-1511.	70
Figura 10. Forma piena e vacua dei solidi di Leonardo da Vinci rappresentati nel "De Divina Proportione", 1509.	70
Figura 11. La Creazione di Adamo, Michelangelo, 1511 e, sovrainposta, la proporzione aurea.	73
Figura 12. L'Annunciazione, Leonardo da Vinci (1472-1475) e, sovrainposto, un triangolo aureo.	73
Figura 13. A sinistra Doriforo di Policleto (riproduzione), 440 a.C.; al centro: Uomo Vitruviano, Leonardo Da Vinci, 1490; a destra: Modulor, Le Corbusier, 1948; sovrapposta la spirale aurea e la sezione aurea.	73
Figura 14. La relazione tra sezione aurea, rettangolo aureo, spirale aurea e numeri di Fibonacci.	80
Figura 15. Esempi di Spirale logaritmica in natura. Sopra, da sinistra: due piante di aloe, semi di girasole; in basso da sinistra: Nautilus, ciclone tropicale, galassia.	86
Figura 16. Relazione tra sezione aurea e cammino umano	98

IL NUMERO MERAVIGLIOSO:
LA SEZIONE AUREA

*Bellezza della matematica,
armonia dell'universo, musica della natura*

PREMESSA. LA MUSICA DEI NUMERI

*“Notte di giovani attori, di pizze fredde e di calzoni
 Notte di sogni, di coppe e di campioni
 Notte di lacrime e preghiere
 La matematica non sarà mai il mio mestiere
 E gli aerei volano in alto tra New York e Mosca
 Ma questa notte è ancora nostra”*

Antonello Venditti, *Notte prima degli esami*, 1984

Ci sono vite che si incontrano in un punto, nello stesso attimo, nello stesso luogo, il tempo di uno sguardo, di una chiacchierata, di un bacio, poi niente più, si allontanano per sempre.

Ci sono vite che si intrecciano, come i rami della pianta della vite, come quelle di due innamorati, dei duellanti di Conrad, quelle di certi amori cantati da Venditti che fanno dei giri immensi e poi ritornano.

E poi ci sono vite parallele, che vanno tutte verso la stessa direzione, verso un punto all'infinito che non vedi, ma che non si incontrano mai, accomunate da un pensiero, un sentimento, un numero, ma che, come fossero rette, mantengono sempre la stessa distanza. Vite che non si incontrarono mai, se non all'infinito, se non nella nostra mente. Magari distanti nello spazio o nel tempo, come le vite parallele descritte da Plutarco, come Alessandro Magno e Giulio Cesare, Demostene e Cicerone. Come le vite raccontate in questo libro: Fidia e Leonardo, Pitagora e Keplero, Vitruvio e Raffaello, Fibonacci e Mandelbrot. Vite che però all'infinito si ritrovano in un punto ben preciso, fatto di infinite cifre decimali, che inizia per 1,618...

Questo libro parla di questo numero e delle emozioni che ha suscitato, e ancora oggi suscita, nelle grandi menti di scienziati e artisti, così come in quelle di uomini comuni. Questo libro non è un

rigoroso saggio matematico per studiosi o specialisti, né per mistici della numerologia. È invece una storia, anzi è un insieme di storie, quelle degli uomini che hanno intrecciato le loro vite, per un motivo o per l'altro, con questo numero, più o meno consapevolmente. Ed è la storia di come la mia vita, incredibilmente quanto indegnamente, sia finita per intrecciarsi con queste storie. È un libro che spera semplicemente di suscitare un contagio emotivo tra il lettore e la passione di quegli uomini, prima ancora che con la loro intelligenza e grandezza. È un libro sulla bellezza della matematica, sull'armonia dell'universo, sulla musica suonata dalla natura. È un libro su un numero, uno solo, un piccolo numero irrazionale che unisce in sé tutte queste cose, tutte queste vite.

Non è quindi un libro per chi fa il matematico di mestiere, manca di un dettagliato rigore scientifico per esserlo, non si basa su formule e astrazioni, che al lettore comune forse risulterebbero astruse. È piuttosto un racconto, come fosse una canzone pop, che parla di matematica, perché alla fine, anche se Venditti cantava che la matematica non sarebbe mai stato il suo mestiere, erano proprio le formule matematiche a permettere agli aerei di volare in alto tra New York e Mosca, ai computer di funzionare, alla natura di avere leggi fisiche certe e al nostro cervello di aprire le porte della conoscenza, porte che altrimenti sarebbero chiuse come le chiese quando ti vuoi confessare.

Questo libro è scritto con passione e racconta, quindi, ciò che ha appassionato chi scrive e che spera di appassionare anche voi nel raccontarvi questa storia fatta di matematica e di citazioni cinematografiche, di filosofia e di canzoni pop, di arte e di scienza. Questo libro è una sfida, perché di solito chi parla di passione e bellezza non sta parlando di matematica, ma cercherò di dimostrarvi che parlando di matematica si parla anche di bellezza e di passione. Lo so, tanti maestri e professori si ostinano a raccontare la matematica fatta di formule difficili e noiose nella testa degli studenti. Incomprensibili sequenze di simboli da imparare a memoria, piuttosto che relazioni da comprendere. Ciò porta spesso a contrapporre il rigore matematico con l'estro artistico, le fredde formule alla passione dell'arte. Persino nel bellissimo e commovente film "L'attimo fuggente" l'illuminato professor John Keating, interpretato magistralmente dal compianto Robin Williams, fa strappare la pagina di un libro che suggerisce un metodo per va-

lutare la grandezza di una poesia basato sul fare un grafico mettendo su un piano cartesiano la perfezione (sull'asse delle ascisse) e l'importanza (sull'asse delle ordinate) della poesia stessa. Quel pedissequo tentativo di applicare la matematica alla poesia viene letteralmente definito dal professor Keating un "escremento". Eppure, la poesia non segue forse schemi matematici? L'endecasillabo vuole che siano 11 le sillabe di un verso, così come il settenario vuole che siano 7: sono entrambi numeri primi. E gli schemi delle rime non sono forse come schemi matematici? La Divina Commedia è composta di 3 cantiche e 100 canti esatti. Non 101, non 99. Sono numeri ed è poesia, è poesia e sono numeri.

Questo libro vuole mostrare un altro modo di fare matematica, che la lega alla poesia, alla musica, all'arte, alla bellezza, perché, come diceva Galileo, la matematica è l'alfabeto con cui è scritto l'Universo. Così fece anche Marcus Du Sautoy quando scrisse *"The Music of The Primes"*, la Musica dei (numeri) Primi (malamente tradotto in italiano in "L'Enigma dei numeri primi": come a dire che la matematica può essere un mistero e non una musica, e invece può essere musica e mistero, illuminazione e armonia). Così fece anche Keith Devlin nel libro *"The Man of Numbers"* (anche questo malamente tradotto in Italia con il titolo "I numeri magici di Fibonacci", mentre non parla affatto di magia, e addirittura dedica solo una piccola parte alla sequenza di Fibonacci).

In questo libro parleremo molto della sequenza di Fibonacci, ma senza riferimenti magici o mistici. Ne parleremo in termini di armonia, bellezza, musicalità. Leibnitz diceva che la musica è il piacere che prova la mente umana quando conta senza essere cosciente di star contando. Nel libro che avete tra le mani tenterò l'azzardo del processo opposto a quello della pagina fatta strappare dal professor Keating in cui si voleva mettere in matematica una poesia. Questo libro vuole raccontare quanta poesia, quanta musica, quanta armonia ci sia nella matematica, perfino in un piccolo numero irrazionale.

Grazie a quel piccolo numero irrazionale, cercherò di spiegare perché la matematica può risultare estremamente affascinante, proprio come una bellissima melodia. Lo so, a qualcuno può sembrare assurdo, qualcuno sarà scettico, ma forse alla fine di questo libro non vi sembrerà così assurdo che un genio come Gauss abbia detto: "Voi non avete idea di quanta bellezza ci sia in una tavola di

logaritmi”. Proverò a mostrare questa bellezza, proverò a mostrare l’armonia matematica che vi è nell’universo, dalla simmetria dei nostri corpi alla forma delle galassie, entrambe legate a quel piccolo numero irrazionale di cui si parla in questo libro e conosciuto con tanti nomi diversi.

La sezione aurea, ϕ (Phi), anche conosciuta come rapporto medio ed estremo, o divina proporzione, è quel numero che è nel nostro corpo così come nelle stelle sopra di noi, nel battito del nostro cuore così come nei nostri passi, nelle pieghe dei calcoli matematici che ci girano in testa così come nella bellezza di molte delle cose che abbiamo intorno.

1. LA SCOPERTA DELL'INCOMMENSURABILE, OVVERO IL NUMERO PROIBITO

*“Oh life is bigger
It's bigger than you
And you are not me
The lengths that I will go to
The distance in your eyes
Oh no, I've said too much
I set it up
That's me in the corner
That's me in the spotlight
Losing my religion”*

R.E.M., *Losing my religion*, 1991

Nel sesto secolo prima di Cristo, in Oriente nacquero due religioni, due filosofie: in India nasceva il Buddismo, grazie a Siddhartha Gautama, mentre in Cina Confucio fondava la religione che avrebbe portato il suo nome.

In quello stesso periodo, molto più a Ovest nasceva un'altra religione, un'altra filosofia, anch'essa grazie a un maestro dotato di sconfinato carisma e rara intelligenza. Considerate che in quel periodo c'era già Roma che combatteva le sue battaglie contro altri popoli italici, c'era già l'antica cultura della Grecia, c'era già stata Troia, erano state già scritte l'Iliade e l'Odissea, erano già state erette le tre grandi Piramidi d'Egitto, ma non esisteva la parola matematica.

La vita di questo maestro è avvolta dal mistero, sebbene il suo nome sia famoso e riecheggi sui banchi di scuola. Nei secoli successivi diranno di lui che era un profeta, un guaritore, un mago, uno scienziato, un filosofo, un matematico, un vegetariano, il capo di una setta. Anzi, diranno che fu lui a inventare la parola filosofia, che fu lui a inventare il vegetarianismo, che fu lui a inventa-

re la parola matematica. Qualcuno dirà addirittura che era il figlio di un Dio, del Dio Apollo Pitio, uno dei tanti epiteti del dio Apollo, questo datogli per aver ucciso un enorme pitone delle dimensioni di un drago.

La sua figura è così leggendaria che qualcuno dirà che fosse stato proprio il Dio Apollo Pitio ad averlo mandato a parlare in sua vece all'agorà, alla piazza, alla folla, all'umanità. Ma in realtà lui parlava solo ai suoi discepoli, chiedendogli peraltro di non divulgare al di fuori della loro comunità i suoi insegnamenti, proprio come si fa in una setta religiosa. Per fortuna la sua dottrina verrà divulgata lo stesso e conosciuta ovunque. Dicono di lui che viaggiò anche in Egitto e che lì fu fatto prigioniero e deportato nella città dei bellissimi giardini pensili, Babilonia. La sua vita è così avvolta nel mistero che non sappiamo se ciò sia verità o leggenda, mito o storia. Di certo egli conosceva (direttamente o indirettamente) la cultura babilonese e quella egizia. Proprio quest'ultima era una cultura basata sul politeismo, come la religione greca, con una pletora di dei e dee.

Chissà se egli vide mai davvero le grandi Piramidi, le tombe dei faraoni. Gli Egizi credevano che dopo la morte si potesse finire in una sorta di Paradiso o una sorta di Inferno a seconda di come ci si fosse comportati in vita, cosa comune a molte religioni. In particolare, credevano che il defunto si presentasse al cospetto di Osiride, dove il suo operato in vita veniva giudicato per decidere se la sua anima dovesse finire nei campi Aaru o nell'infernale Duat. Il giudizio degli dei sull'operato in vita del defunto avveniva grazie a una bilancia, uno strumento di misura che avrebbe dato un responso oggettivo. Su un piatto veniva posto il cuore del morto e sull'altro la piuma che la dea Maat solitamente teneva sulla testa. Era una piuma di struzzo, e Maat era la dea dell'ordine e della giustizia. Maat era figlia del dio Ra, il dio del Sole, e sposa di Thot, con cui aveva avuto otto figli. Se il cuore del defunto pesava più della piuma allora veniva divorato dall'Ammut, una chimera con la testa di coccodrillo e il corpo per metà di leone e per metà di ipopotamo. E poi l'anima divorata del defunto finiva nel Duat. Se invece i piatti della bilancia rimanevano in equilibrio voleva dire che il cuore era leggero come la piuma di Maat e, quindi, il defunto si era comportato in vita secondo giustizia e in armonia con l'ordine universale, facendo ciò che gli dei si aspettavano da lui e quindi poteva accedere ai paradisiaci campi Aaru.

Maat era la dea della giustizia, ma anche dell'ordine, messa da suo padre Ra al posto del Caos. Gli Egizi identificavano quindi la giustizia come ordine: si vive secondo giustizia se si vive all'interno dell'ordine del cosmo, facendo ciò per cui si è stati creati, se si vive in armonia con l'Universo, come fossimo parte di un grande ingranaggio. È una visione bellissima, la stessa di Walt Whitman quando dà questa risposta a quale sia il senso della vita:

*“Che tu sei qui, che la vita esiste e l'identità,
che lo straordinario spettacolo continua,
e che tu puoi contribuire con un verso”*

Verso che Vecchioni certamente conosce quando scrive e canta: “Sogna, ragazzo, sogna, Ti ho lasciato un foglio sulla scrivania, manca solo un verso a quella poesia, puoi finirla tu”.

Non sono avanti solo nella visione di un grande meccanismo di cui tutto e tutti facciamo parte, ma gli Egizi sono avanti anche nell'idea dell'uso di una bilancia per valutare una vita giusta o meno. È un modo di vedere che lega in modo molto stretto l'ordine e la giustizia con il concetto, poco astratto e molto pratico, di misura, di giudizio oggettivo. È questa un'idea estremamente moderna se pensiamo che il padre riconosciuto del metodo sperimentale è Galileo Galilei, che opera nel XVII secolo e che dirà: “Ciò che è misurabile misuralo, ciò che non lo è rendilo tale”.

Per gli Egizi quindi la triade giustizia, ordine e misura, formano una sorta di contrapposizione al Caos.

A conferma del legame tra la dea Maat e la misura vi è il fatto che la rappresentazione in geroglifico del nome della dea conteneva il simbolo di un braccio, per la precisione di un braccio dal gomito alla punta del dito medio della mano. Quel segno rappresentava il cosiddetto cubito, unità di misura della lunghezza (poco meno di 60 centimetri) che rimase in uso a lungo in molte civiltà prima che il sistema metrico decimale prendesse il suo posto (a Firenze, per esempio, fu utilizzata fino al 1860, finché la città non fu annessa all'Italia). Inserire il cubito nel nome di Maat voleva dire che senza misura non può esserci ordine, senza misura non può esserci giudizio né giustizia (d'altronde anche negli odierni tribunali servono prove oggettive per condannare qualcuno).

Ma perché questa lunga digressione sulla dea Maat, quando invece volevamo parlare di un maestro vissuto nel V secolo avanti Cristo? Perché è probabile che quest'ultimo fosse rimasto estremamente affascinato da questo concetto di ordine e misura, e usò la radice Maat per inventare anche un'altra parola oltre a filosofia (che vuol dire amore per il sapere). Una parola altrettanto importante, che dà il nome alla disciplina che sarà alla base di tutte le altre discipline scientifiche. Egli la chiamerà "*Mathematike*", matematica, ovvero lo studio della scienza, il misurare con la mente, il pensare in modo quantitativo, il ragionare per numeri. E proprio sui numeri, sulla matematica, il figlio di Apollo Pitio che parla all'Agorà, fonderà una religione basata sulla credenza che i numeri siano alla base dell'ordine dell'Universo. Questo concetto sarà la sua ossessione. Nella sua visione del mondo, l'universo non è solo misurabile attraverso i numeri, ma è diverso dal Caos proprio perché fatto di quantità numerabili. I numeri saranno gli atomi del suo Universo. Certo però che chiamarlo "figlio di Apollo Pitio che parla all'Agorà" è un po' scomodo, converrà allora chiamarlo con il nome con cui è conosciuto, con cui è passato alla storia, che abbrevia Pitio e Agorà: Pitagora.

Nel VI secolo a.C., nel Sud Italia, a Crotona, nella Magna Grecia, Pitagora fondò la sua scuola. Nel frattempo, nel Centro Italia una piccola città sta pian piano allargando il suo dominio e sarà destinata a un duraturo impero. Il suo nome è Roma e la lingua parlata è il latino. Questa lingua, che sarà alla base di molte lingue europee, diffonderà ancora di più quel suffisso derivante dalla dea Maat, non solo usato per la matematica, ma lo metterà anche nella parola materia, perché la materia è ciò che si può toccare e che quindi si può misurare, la sostanza da cui nascono le cose, e quindi anche nella parola mater, ammorbida in italiano in madre, colei dalla quale nascono i bambini.

Come già detto, la figura di Pitagora è avvolta da un alone di mistero. La sua scuola era una scuola di matematica, ma anche di filosofia (difficile dividere le discipline del sapere a quel tempo), con alcuni connotati quasi da setta segreta, da setta religiosa. I suoi discepoli, che presero il nome di pitagorici, erano obbligati a specifici riti e a mantenere segreto ciò che apprendevano. Tra le storie più famose (tra verità e mito) vi è quella del divieto assoluto di mangiare fave, tant'è che leggenda vuole che Pitagora sia morto men-

tre fuggiva da dei soldati nemici perché preferì farsi prendere piuttosto che nascondersi in un campo di fave. È probabile che questo strano divieto fosse connesso al favismo, ma anche su questo non vi sono certezze. Anche la carne era vietata ai pitagorici, e per questo possiamo pensare a Pitagora come il primo a promuovere il vegetarianismo in Occidente. Ciò era probabilmente dovuto al fatto che Pitagora credeva alla metempsicosi, cioè nella reincarnazione delle anime dei defunti, anche in animali. Non è d'uopo mangiare la carne di una mucca se in una vita passata la mucca magari era tua nonna...

Ripensando oggi a Pitagora ovviamente l'associamo al famoso teorema che afferma che in un triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti. Una leggenda racconta che Pitagora, osservando delle mattonelle quadrate, notò che se avesse calcolato il quadrato della diagonale della mattonella questo avrebbe avuto un'area pari a 2 mattonelle (essendo formata da 4 mezza mattonelle), cioè pari alla somma delle due mattonelle che formavano i quadrati sui cateti (cioè le mattonelle, figura 1). Da lì, poi, estese questa scoperta a tutti i triangoli rettangoli.

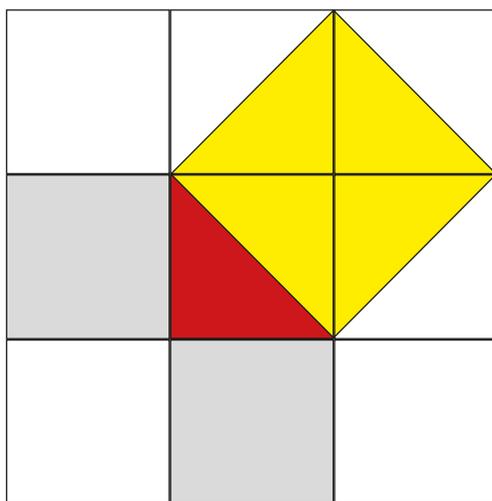


Figura 1. Mattonelle e teorema di Pitagora

Il Teorema sui triangoli rettangoli tuttavia era già noto a Egizi e Babilonesi, a Cinesi e Indiani, e sembrerebbe che Pitagora l'avesse semplicemente appreso dagli Egizi indirettamente o forse durante

quel suo famoso (fantomatico?) viaggio in Egitto con conseguente deportazione a Babilonia a seguito dell'invasione dell'Egitto da parte dei Persiani nel periodo in cui lui era presso le sponde del Nilo. C'è quindi la concreta possibilità che Pitagora abbia "copiato", o meglio, riportato e divulgato il teorema che oggi porta il suo nome. In quest'ultimo caso il ruolo di Pitagora sarebbe stato comunque fondamentale e risiederebbe nell'aver capito l'importanza di quella relazione tra l'ipotenusa e i suoi cateti.

Scoperto dall'osservazione delle piastrelle o copiato, comunque il Teorema del quadrato costruito sull'ipotenusa è passato alla storia come il teorema di Pitagora. Peraltro, né Pitagora, né alcuno prima di lui, dimostrarono la correttezza del teorema o quantomeno non ne abbiamo ritrovato la dimostrazione, che invece è presente nel primo libro de "Gli Elementi" di Euclide, scritto circa tre secoli dopo e di cui parleremo più avanti.

Dal teorema di Pitagora scaturiscono naturalmente le terne conosciute come terne pitagoriche, ovvero quelle formate da tre numeri interi che possono essere le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo. La più semplice è 3-4-5 (ma ci sono anche 5-12-13 oppure 7-24-25 eccetera). Ma anche queste terne erano conosciute ben prima di Pitagora, addirittura mille anni prima, dai Babilonesi, come dimostrato dal ritrovamento di ben 15 terne "pitagoriche" segnate su una antichissima tavoletta babilonese.

Un'altra attribuzione indebita è quella delle tavole pitagoriche, famose perché un tempo ogni quaderno a quadretti che si rispettasse riportava in fondo una pagina con una tavola pitagorica. Sono quelle tavole in cui ogni elemento è dato dalla moltiplicazione tra il numero di riga e quello di colonna (di solito 12 righe e 12 colonne, arrivando al 144). Ma se per il teorema di Pitagora quanto meno dobbiamo al greco l'averne intuito la validità e l'importanza, con queste tavole pare proprio che Pitagora non c'entrasse nulla e ci sia stato un errore di attribuzione da parte di un copiatore amanuense medievale, che le attribuì al matematico greco, quando invece tali tavole moltiplicative non avevano nulla a che fare con il maestro.

Ma se il teorema lo copiò dai Babilonesi, se le terne pitagoriche erano già conosciute, se le tavole pitagoriche non le inventò affatto, che fece di innovativo Pitagora? Forse la cosa più innovativa che fece Pitagora (oltre a sistemare i principi matematici se-

condo un ordine logico filosofico che ne permise la divulgazione, cosa certamente non di poco conto, anzi...) fu creare una teoria musicale, dando un ordine anche a quest'arte. E su questo pare proprio che bisogna riconoscere un contributo originale e importantissimo a Pitagora, secondo il quale tutto doveva essere "ordine", tutto doveva essere razionale (benché l'unione di matematica e misticismo portò i pitagorici ad assegnare ai numeri dei significati quasi magici). Leggenda vuole che egli sentì il rumore battente del martello del fabbro e quei suoni, quegli echi, lo portarono a costruire uno strumento monocorde e a studiare il vibrare delle corde, introducendo i concetti di toni e ottave. Da quel momento in poi l'ordine dell'Universo, la matematica e la musica divennero interessi comuni a tutta la filosofia greca in cerca della Verità. È interessante che ancora oggi noi utilizziamo il termine analisi armonica per identificare le componenti sinusoidali, cioè le onde fondamentali di una funzione o di un segnale. Se vi sembra strano questa associazione tra matematica e musica forse non vi siete mai accorti che la parola Aritmetica nasconde al suo interno la parola ritmo. Parafrasando Gauss potremmo anche dire: "Voi non avete idea di quanti ritmi vi siano in una tavola di logaritmi".

È comunque difficile scindere verità storica e leggenda nella vita di Pitagora. Tali incertezze sono dovute da un lato al fatto che Pitagora non ha lasciato nulla di scritto (non vi stupite, fu lo stesso anche per altri filosofi greci come per esempio Socrate), dall'altro lato al fatto che egli fosse una sorta di messia per i suoi discepoli, che portò a generare diversi miti e leggende intorno alla sua figura. Mario Livio nel suo libro sulla sezione aurea scrive:

"Benché sia quasi impossibile attribuire con certezza qualsivoglia conquista matematica sia a Pitagora sia ai suoi discepoli, non v'è dubbio che siano stati loro a mescolare teoria dei numeri, filosofia della vita e misticismo in una misura forse senza uguali. E a tale proposito, non è privo di interesse il fatto che Pitagora fosse contemporaneo di altri fondatori di grandi religioni quali Buddha e Confucio".

Sicuramente siamo in un periodo in cui la filosofia cerca di dare un ordine alle cose, e l'ordine matematico si combina con l'ordine etico e con la religione. È il tempo dei miti che cercano di spiegare

l'origine del mondo e che, con gli esempi dei loro eroi, cercano di unificare civiltà intorno a dei valori condivisi.

Tuttavia, almeno una scoperta a Pitagora o ai pitagorici dobbiamo attribuirli. Una scoperta che paradossalmente porterà quella fede incrollabile nell'ordine matematico dell'Universo a vacillare d'improvviso.

Non sappiamo se già in Pitagora o nei suoi discepoli ci fu questa sorta di crisi mistica, ma certamente la loro fede nei numeri vacillò alla luce di una nuova sconvolgente scoperta: l'esistenza dei numeri irrazionali, numeri senza ordine nelle infinite cifre che proseguono oltre la virgola. Per chi pensava che l'ordine dell'Universo si basasse sui numeri non è semplice accettare che possano esistere numeri senza ordine. Due numeri in particolare è plausibile che abbiano messo in crisi la fede dei pitagorici nei numeri stessi come basi dell'ordine universale, due numeri irrazionali che proprio i pitagorici potrebbero aver scoperto.

Il primo è: 1,4142135623730959488016887242097...

Il secondo è: 1,6180339887498948482045868343656...

Ma come è possibile "scoprire" l'esistenza di uno o più numeri? Dove si nascondevano prima di essere scoperti? Ripensiamo alle mattonelle di Pitagora. Se il lato della mattonella è uno, la somma delle aree dei quadrati costruiti su essi sarà pari a 2 e, per il suddetto teorema, questa sarà anche l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa. Ne consegue che l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele i cui cateti sono entrambi di lunghezza pari a 1 sarà uguale alla radice quadrata di 2. Lo sappiamo, ma allora non lo sapevano, né avevano calcolatrici per calcolare quanto valesse. Ed ecco allora che inizia a circolare una dimostrazione per assurdo, che si basa solo sulla logica, da leggere solo se siete ben disposti verso questo tipo di ragionamenti.

Il quadrato della diagonale (D) di una mattonella quadrata sarà pari alla somma dei quadrati dei suoi lati (L), quindi $D^2=2L^2$, che possiamo scrivere anche come $(D/L)^2=2$.

Immaginiamo che si sia già proceduto alla varia scomposizione e riduzione del rapporto D/L e si sia arrivati a due valori di D ed L che siano primi tra loro (altrimenti applichiamo la scomposizione finché non si arrivi a numeri primi, ovvero se fossero per esempio 6 e 9, scriviamoli come 2 e 3). Se D ed L fossero numeri interi (gli unici fino ad allora conosciuti), D^2 deve esse-

re per forza un numero pari, perché uguale al doppio di qualcosa ($2L^2$). Ma se D^2 è pari, lo è anche D , e quindi divisibile per 2. Se D è pari, affinché D ed L siano primi tra loro L deve essere dispari. Se D è pari possiamo scriverlo come il doppio di qualcosa, per esempio $D=2T$, allora la relazione iniziale diventa $4T^2=2L^2$ e quindi $2T^2=L^2$, ma allora L^2 è pari e quindi anche L , ma abbiamo detto che cioè è impossibile, perché L deve essere dispari. Ecco dimostrato per assurdo che D e L non possono essere commensurabili tra loro, cioè esprimibili come frazione di numeri interi.

Oggi sappiamo che quell'ipotenusa (pari alla diagonale di un quadrato di lato pari ad 1) sarà pari alla radice quadrata di 2. Lato e diagonale del quadrato non sono commensurabili, ovvero il loro rapporto non può essere scritto come una frazione di numeri interi. Vuol dire che non puoi dire che nella diagonale ci entra N volte il lato senza che quell' N non sia un numero con infinite cifre decimali che si ripetono senza un ordine preciso. La radice di due è infatti un numero irrazionale: 1,4142135623730959488016887242097...

I pitagorici non scoprirono quale fosse questo numero, ma per logica capirono che non poteva essere espresso come frazione di due numeri, e che quindi dovesse avere infinite cifre decimali e li chiamarono irrazionali, nel duplice significato che non possono essere espressi come rapporto (in latino *ratio*), e che non possono essere capiti fino in fondo perché fatti di infinite cifre apparentemente disordinate.

Ma se i numeri erano il modo in cui si poteva mettere ordine all'Universo per i pitagorici, l'esistenza di un numero "disordinato" minava tutto il costruito sul quale si basava la loro filosofia, la loro religione. Non sappiamo se fu davvero la radice quadrata di 2 il primo numero irrazionale a essere scoperto. Ciò è plausibile visto che si ottiene facilmente come rapporto tra diagonale e lato di un quadrato, una figura geometrica tra le più semplici, o appunto come ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele con cateti di lunghezza pari ad 1. Possibile che Pitagora, così famoso per il teorema sui triangoli rettangoli, non si fosse accorto di questa "anomalia?" Ovvero che il rapporto tra ipotenusa e cateto di quello che forse è il più semplice dei triangoli rettangoli (perché metà di un quadrato) non potesse essere scritto come frazione di due numeri

interi? È vero che sappiamo ben poco di Pitagora, ma ciò è dovuto anche al silenzio che lui imponeva alla sua setta di seguaci verso l'esterno. È possibile, o quantomeno non del tutto improbabile, che sia stato Pitagora stesso a scoprire per primo il concetto di incommensurabilità, per poi tenerlo segreto.

È importante ricordare che Pitagora era considerato un maestro nel senso quasi messianico del termine. Scrisse Cicerone molti secoli dopo:

“I pitagorici [...] erano soliti rispondere: «L'ha detto lui». Questo lui era Pitagora: tanto grande era il peso di un'opinione preconstituita che l'autorità prevaleva anche senza una dimostrazione razionale”.

Se lo aveva detto Pitagora doveva essere vero per forza, se l'aveva detto Pitagora bisognava obbedire. Ancora oggi peraltro usiamo quell'espressione “ipse dixit”: l'ha detto quello, amen. Le parole di Cicerone peraltro risuonano come un'aspra critica a quell'autorità così forte da dargli fiducia e ragione a prescindere da qualsiasi dimostrazione razionale. Cosa che ancora oggi purtroppo si ripropone spesso, ma che da Galileo in poi dovrebbe esser mutata, visto che il metodo scientifico dovrebbe basarsi su prove e dimostrazioni, non su opinioni preconstituite.

Tornando all'incommensurabilità (ovvero il caso in cui due grandezze non sono commensurabili in un numero finito di volte) ci sono anche due numeri irrazionali derivanti da altrettante figure geometriche dalle quali potrebbe essere scaturita questa scoperta. Una è ovviamente la circonferenza che è legata al diametro dal rapporto noto oggi con il nome di “pi greco” (π) e che è un numero irrazionale pari a 3,1415926535...

L'altra possibilità è legata alla stella a cinque punte che nasce unendo i vertici di un pentagono regolare attraverso le sue diagonali. Non a caso, proprio tale stella era il simbolo dei pitagorici. Tale figura era stata scelta in onore delle proprietà mistiche che i pitagorici davano al numero 5: questo è formato dal 2, il numero simbolo della femmina, e dal 3, il numero simbolo del maschio (d'altronde, 2 sono le ovaie, 3 i genitali maschili). Potrebbe esser lecito supporre che qualche pitagorico, se non proprio Pitagora stesso, si sia chiesto quale dovesse essere il rapporto tra lato del pentagramma (la stella a cinque punte, formata dalle diagona-

li del pentagono) e il lato del pentagono che la circonda. Anche in questo caso, come quello del quadrato, lato e diagonale sono incommensurabili, non possono cioè essere rappresentati con una frazione tra due numeri interi.

Il loro rapporto è infatti uguale a

$$(1 + \sqrt{5})/2$$

che è scrivibile anche come $0,5 + 0,5 \cdot 5^{0,5}$ (tutti 5, d'altronde deriva dal pentagono...) e che è pari al numero irrazionale 1,618033 9887498948482045868343656... conosciuto con il nome di sezione aurea e con il simbolo ϕ .

Se fatta da Pitagora o meno, se fatta per la radice di 2, per la sezione aurea o per "pi greco", comunque sia andata la scoperta dell'incommensurabilità, fu talmente sconvolgente che pare fu tenuta nascosta e fu dato agli allievi della scuola il divieto assoluto di divulgarla. Nessuno avrebbe dovuto rivelare al mondo l'esistenza del concetto di incommensurabilità, di questi numeri così disordinati nel loro susseguirsi di infinite cifre decimali senza alcun ordine da essere chiamati ancora oggi numeri irrazionali.

Tutto ciò conferisce alla sezione aurea se non proprio una data di nascita almeno un intervallo piuttosto preciso relativo alla sua scoperta: ovvero tra il VI secolo a.C., quando ancora non era noto alcun numero irrazionale, e il V secolo d.C. quando verrà costruito il Partenone, la cui facciata sarà progettata proprio in sezione aurea.

Pare che a rivelare il segreto dell'esistenza dei numeri irrazionali al di fuori della setta dei pitagorici fu Ippaso di Metaponto, diventato anche per questo il più famoso dei pitagorici dopo Pitagora stesso. Non è escluso che fu Ippaso stesso a scoprire l'incommensurabilità (senza nulla togliere alla possibilità, forse remota e di certo affascinante, che questa fosse già stata scoperta da Pitagora stesso, che volle tenerla segreta). Lo studioso Kurt von Fritz sostiene l'ipotesi che fu proprio Ippaso a scoprire la sezione aurea e a rivelarne al mondo l'esistenza. Quando morì in un naufragio, i pitagorici si convinsero che fossero stati gli dei a punirlo per la sua empietà di aver raccontato l'esistenza dei numeri irrazionali, che sarebbero dovuti rimanere segreti, e Ippaso fu visto come un traditore dell'ordine dei numeri.

Gli dei punirono chi aveva rivelato agli uomini la sezione aurea, così come avevano punito Prometeo per aver donato loro il fuoco. E così come per il fuoco, gli uomini si appassionarono a questo numero misterioso e proibito.